

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Математические модели и численные методы в финансах
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	4
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: И.Г. Эрлих, канд. физ.-мат. наук, заместитель директора по учебно-воспитательной работе

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 01.06.2023

## Аннотация

В курсе рассматриваются вопросы построения математических моделей и применения вычислительных методов в области финансов. В частности в таких разделах финансов как расчет цены и управление рисками производных финансовых инструментов.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- знакомство с основными понятиями и моделями области численных финансов, приобретения навыков применения вычислительных методов к типовым задачам в этой области.

#### Задачи дисциплины

- познакомить с основными моделями численных финансов;
- решать задачи применяя навыки вычислительных методов.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные типы финансовых и производных финансовых инструментов;
- основные математические модели, применяемые для моделирования производных инструментов.

уметь:

- применять вычислительные методы для решения задач численных финансов.

владеть:

- принципами построения моделей и реализации численных методов в финансах.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Обзор задач моделирования в финансах, базовые понятия.	4	4		6
2	Биномиальная модель вычисления цены опционов.	2	2		6
3	Построение модели вычисления цены опционов в непрерывном времени.	2	2		6
4	Интеграл Ито.	2	2		6
5	Модель Блэка-Шоульца-Мертона. Расчет цены опциона через численное решение уравнения в частных производных.	2	2		6
6	Поверхность волатильности.	2	2		5
7	Задачи проп-трейдинга.	2	2		5
8	Опционы в задачах алгоритмической торговли.	2	2		5
9	Линейные производные продукты.	2	2		5
10	Задачи оптимизации в управлении рисками.	2	2		5
11	Кредитные инструменты. Стохастические модели процентных ставок.	2	2		5
12	Кредитный риск.	2	2		5
13	Оценка активов и управление портфелем.	2	2		5
14	Свопы на волатильность.	2	2		5
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

###### 1. Обзор задач моделирования в финансах, базовые понятия.

Обзор типов финансовых компаний и задач, которые они решают. Основные предпосылки построения моделей, экономические обоснования. Типы и основные особенности финансовых данных. Временная стоимость денег. Дисконтирование.

###### 2. Биномиальная модель вычисления цены опционов.

Определения, базовые термины. Пут-колл паритет опционов. Упражнение на репликацию: структурный форвард. Биномиальная модель. Анализ одношагового случая. Риск нейтральная вероятность в этой модели. Многошаговый случай, модель Кокса-Роса-Рубинштейна.

Примеры задач: расчет Европейского и Американского опционов в модели Кокса-Роса-Рубинштейна. Анализ прибыльности исполнения Американского колл опциона до эскапири. Репликация хеджирование бинарного опциона европейскими опционами.

### 3. Построение модели вычисления цены опционов в непрерывном времени.

Броуновское движение: интуиция, математическое определение, основные свойства (без доказательств). Недифференцируемость винеровского процесса. Формула Ито. (без доказательств). Геометрическое броуновское движение. Риск нейтральная мера в случае непрерывного времени. Преобразование уравнения геометрического броуновского движения рискованного актива при переходе в риск нейтральную меру. Применение метода Монте-Карло для вычисления цен опционов. Разбор примеров кода с реализацией.

Пример задач: расчет цены разных типов опционов: барьерного, бинарного и т. п. Конструирование заданной функции выплаты на основе опционов колл и пут.

### 4. Интеграл Ито.

Построение интеграла Ито. Некоторые свойства интеграла Ито. Формула Ито. Стохастические дифференциальные уравнения. Примеры стохастических дифференциальных уравнений, использующихся в моделировании финансовых задач. Примеры задач: компьютерная симуляция процесса, основываемого стохастическим дифференциальным уравнением.

### 5. Модель Блэка-Шоулца-Мертона. Расчет цены опциона через численное решение уравнения в частных производных.

Модель Блэка-Шоулца-Мертона. Предположения модели. Общий ход рассуждений. Динамическое хеджирование дельта-риска. Уравнение Блэка-Шоулца в частных производных. Формула Блэка-Шоулца для Европейского опциона. Дифференциальные показатели риска, "греки".

Возможные разностные схемы. Явная, неявная, схема Кранка-Николсона. Разбор примера реализации вычисления на основе схемы Кранка-Николсона.

Пример задач: примирение вычисления на основе схемы Кранка-Николсона к бинарному опциону.

### 6. Поверхность волатильности.

Поверхность волатильности. Примеры. Соглашения по котируванию волатильности на рынке разных рангах опционов. Возможные подходы к построению более сложных моделей. Локальная волатильность. Стохастическая волатильность: модель Хестона, модель SABR. Модель диффузии со скачками.

### 7. Задачи проп-трейдинга.

Что такое проп-трейдинг. Основные типы инструментов. Как происходит взаимодействие с биржей. Как устроены биржевые данные. Проблемы применения моделей машинного обучения к биржевым данным.

### 8. Опционы в задачах алгоритмической торговли.

Опционы, работа с биржевыми данными. Три вида волатильности: implied, realized и model-free. Поверхность волатильности и кривая “улыбки”. Особенности биржевых данных по опционам. Модель Блэка-Шоульца-Мертона: проблемы и достоинства. Важность стохастичности волатильности. Переход к vol-time для детерминированной функции времени.

#### 9. Линейные производные продукты.

Форвадр. Фьючерс. Особенности и механизмы работы биржевого рынка производных инструментов. Своп. Задача восстановления кривой дисконтирования.

#### 10. Задачи оптимизации в управлении рисками.

Классы задач оптимизации: линейное программирование, квадратичное программирование, коническое программирование. Примеры пакетов. Задачи на примере оптимизации портфеля. Задача оптимизации вега хеджа для портфеля опционов.

#### 11. Кредитные инструменты. Стохастические модели процентных ставок.

Процентные ставки, базовые понятия. Дисконтирование с переменной ставкой. Описание инструментов и их особенности. Обзор стохастических моделей процентных ставок. Модель НЖМ.

Работа рынка кредитов. Роль коммерческих банков в создании денежной массы. Частичное банковское резервирование. Банковский мультипликатор. Теория эндогенных денег.

#### 12. Кредитный риск.

Актуальность проблемы оценки и управления кредитным риском. Кредитные производные финансовые инструменты. Задача восстановления вероятности кредитного события по рыночным ценам кредитных инструментов.

#### 13. Оценка активов и управление портфелем.

Функция полезности. Формализм теории ценообразования активов. Корреляция рисков. Систематический и идиосинкратический риск. Рыночная премия за риск. Граница эффективности по соотношению ожидаемой доходности и стандартного отклонения. Факторные модели. Модель оценки капитальных активов (CAPM). Теория арбитражного ценообразования.

#### 14. Свопы на волатильность.

Свопы на волатильность. Возможность оценки цены и управления рисками для производных инструментов на неполных рынках. Примеры анализа эффективности использования производных инструментов.

### **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

### **6.Перечень рекомендуемой литературы**

#### Основная литература

1. Основы математической теории финансов [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. В. Куликов ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2013 .— 105 с.

#### Дополнительная литература

1. Финансовая математика [Текст] : учебник для вузов по спец. "Финансы и кредит", "Бухгалтерский учет" / Е. М. Четыркин .— 8-е изд. — М. : Изд-во "Дело" АНХ, 2008 .— 400 с. - Библиогр. в конце глав. - 5000 экз. - ISBN 978-5-7749-0504-1 (в пер.).

#### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

#### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- проработку учебного материала;
- подготовку к занятиям, выполнение заданий.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	<u>4</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет	
<b>Разработчик:</b>	И.Г. Эрлих, канд. физ.-мат. наук, заместитель директора по учебно-воспитательной работе

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математические модели и численные методы в финансах» обучающийся должен:

### знать:

- основные типы финансовых и производных финансовых инструментов;
- основные математические модели, применяемые для моделирования производных инструментов.

### уметь:

- применять вычислительные методы для решения задач численных финансов.

### владеть:

- принципами построения моделей и реализации численных методов в финансах.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Рассчитать доходности облигации до погашения для заданных параметров облигации.
2. Восстановить кривую процентных ставок по заданным ценам инструментов.
3. Сделать численную симуляцию работы стратегии дельта-хэджирования для ванильного опциона.
4. Провести анализ эффекта параметров стратегии на распределение результатов работы стратегии.
5. Репликация заданной функции выплаты через портфель ванильных опционов.
6. Суть стратегии дельта-хэджирования.



7. Сделать расчеты цены опциона методом Монте-Карло.
8. Решить задачу расчета цены опциона с заданной функцией выплаты, используя численное решение уравнения Блэка-Шоулца в частных производных.
9. Сделать расчет цены опциона с заданной функцией выплаты в предположении модели Хестона.
10. Сделать расчет для задачи оптимизации вега-хеджа для портфеля опционов.

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Что такое облигация? Какими параметрами задается этот инструмент?
2. Как рассчитывается доходности облигации до погашения?
3. Что может влиять на рыночную цену облигации?
4. Что такое форвард и фьючерс, в чём сходство и отличие?
5. Как определяется честная цена форварда?
6. Как работает алгоритм восстановления кривой процентных ставок по рыночным ценам финансовых инструментов?
7. Модель Блэка-Шоулца-Мерттона: предположения, ход рассуждений для вывода формулы цены опциона в этой модели.
8. Формула Ито.
9. Какие проблемы связаны с применением модели Блэка-Шоулца-Мерттона на практике? Какие есть пути решения этих проблем?
10. Хеджирование опционов в условиях предположения модели стохастической волатильности.
11. Как работает кредитный дефолтный своп? Какие применения у такого инструмента?
12. Модель оценки капитальных активов.

#### **Критерии оценивания**

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференциального зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой.